หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑
ISBN 978-616-362-816-9
จำนวน ๒๐๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๒

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ ๑๐๓๓๐
www.chulabook.com
ฝ่ายขายติดต่อ แผนกขายส่ง โทร. ๐-๒๓๗๔-๑๓๗๕-๖ โทรสาร ๐-๒๓๗๔-๑๓๗๔

พิมพ์ที่
สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. ๐-๒๒๑๘-๓๕๕๑ โทรสาร ๐-๒๒๑๘-๓๕๕๐
www.cuprint.chula.ac.th

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๒๑ มกราคม พ.ศ. ๒๕๖๒

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ นี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยให้มีความลุ่มลึกขึ้นสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ และมีเนื้อหาสาระที่ทัดเทียมกับนานาชาติ เน้นการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ รวมทั้งเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่นๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้ โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องจำนวนเชิงซ้อน หลักการนับเบื้องต้น และความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ ครูผู้สอน และนักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๒ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

จำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน สมการพหุนามตัวแปรเดียว

หลักการนับเบื้องต้น หลักการบวกและหลักการคูณ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ทฤษฎีบททวินาม

ความน่าจะเป็น การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ ความน่าจะเป็น กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
๒. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า ๑
๓. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๔. เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ ในการแก้ปัญหา
๕. หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

รวมทั้งหมด ๕ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 ....
....

2. ....
....

3. ....
....

บทที่ 1 จะใช้สี บทที่ 2 จะใช้สี บทที่ 3 จะใช้สี

สารบัญ บทที่ 1 – 2

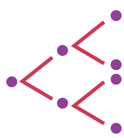
บทที่ | เนื้อหา | หน้า

1

$i^2 = -1$

จำนวนเชิงซ้อน

2



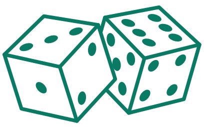
หลักการนับเบื้องต้น

สารบัญ

บทที่ 3

บทที่	เนื้อหา	หน้า

3



ความน่าจะเป็น

บทที่ 1 | จำนวนเชิงซ้อน

$$i^2 = -1$$

จุดมุ่งหมาย

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
2. หารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
3. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
4. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนที่สร้างจากการขยายระบบจำนวนจริง เพื่อให้สมการพหุนามทุกสมการมีคำตอบ ซึ่งถึงแม้การสร้างจำนวนเชิงซ้อนจะมีวัตถุประสงค์ในการแก้ปัญหาในเรื่องดังกล่าว แต่จำนวนเชิงซ้อนยังสามารถนำไปประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในสาขาต่าง ๆ ทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า (circuit analysis) เนื่องจากในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับมีการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่าง ๆ คล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ โดยสามารถใช้จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วร่วมกับสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) ซึ่งกล่าวว่า $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x มาช่วยลดความยุ่งยากซับซ้อนในการคำนวณ ความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนจึงมีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณและวิเคราะห์ปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องในเรื่องการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า และเรื่องอื่น ๆ ที่มีการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในลักษณะที่เป็นคาบ เช่น ในการศึกษาเกี่ยวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า พฤติกรรมของอนุภาคในกลศาสตร์ควอนตัม ฯลฯ จำนวนเชิงซ้อนจึงเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ขั้นสูง

ความรู้ก่อนหน้า

- จำนวนจริง
- เรขาคณิตวิเคราะห์
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ipst.me/8448

1.1 จำนวนเชิงซ้อน

จากที่ทราบมาแล้วว่า สมการพหุนาม $x^2+1=0$ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ แต่นักคณิตศาสตร์ต้องการสร้างระบบจำนวนซึ่งขยายออกไป เพื่อให้สมการพหุนามทั้งหมดมีคำตอบในระบบจำนวนที่สร้างขึ้นใหม่ ซึ่งเซตของจำนวนในระบบใหม่นี้ต้องเป็นเซตที่มีเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต

บทนิยาม 1

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้
สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1. การเท่ากัน
   $(a, b)=(c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
2. การบวก
   $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$
3. การคูณ
   $(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$

อาจเขียนแทน $(a, b)\cdot(c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

ตัวอย่างที่ 1

จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(-1, 2)$ และ $(3, -4)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
(-1, 2)+(3, -4) &= (-1+3, 2+(-4)) \\
&= (2, -2) \\
(-1, 2)(3, -4) &= ((-1)3-2(-4), (-1)(-4)+2(3)) \\
&= (-3+8, 4+6) \\
&= (5, 10)
\end{aligned}$$

■

เมื่อพิจารณาจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(x, 0)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
(a, 0)+(b, 0) &= (a+b, 0) \\
(a, 0)(b, 0) &= (ab-0, a(0)+0(b)) = (ab, 0)
\end{aligned}$$

ซึ่งจะเทียบได้กับการบวกและการคูณของจำนวนจริง ดังนั้น สามารถพิจารณาจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(a, 0)$ ว่าเป็นจำนวนจริง a จะได้ว่าเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อพิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ จะเห็นว่า

$$(0, 1)(0, 1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0)$$

ซึ่งจำนวนเชิงซ้อน $(-1, 0)$ คือ จำนวนจริง -1 นั่นเอง

เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ ด้วยสัญลักษณ์ i จะได้ว่า

$$i^2 = -1$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ใด ๆ

$$\begin{aligned}
(a, b) &= (a, 0)+(0, b) \\
&= (a, 0)+(b, 0)(0, 1) \\
&= a+bi
\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a+bi$

บทนิยาม 2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z=(a, b)$ หรือ $z=a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
เรียก a ว่า **ส่วนจริง (real part)** ของ z และเขียนแทนด้วย $\operatorname{Re}(z)$
เรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** ของ z และเขียนแทนด้วย $\operatorname{Im}(z)$

จากบทนิยาม 2 อาจกล่าวได้ว่า จำนวนจริงก็คือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้ (purely imaginary number)** เช่น $(0, 2)$ หรือ $2i$

เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) ในบทนิยาม 1 ด้วย $a+bi$ และ $c+di$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a+bi=c+di \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a=c \text{ และ } b=d$$

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

การกำหนดสัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ทำให้การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ง่าย โดยใช้สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการบวกและการคูณเช่นเดียวกับสมบัติของการบวกและการคูณของจำนวนจริง โดยที่ $i^2=-1$ เช่น

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(bi+di)\\ &= (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)(c+di) &= a(c+di)+bi(c+di)\\ &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

ต่อไปเมื่อกล่าวว่า $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะถือว่า a และ b เป็นจำนวนจริงโดยไม่ต้องกล่าวซ้ำอีก และเขียนแทน $a+(-b)i$ ด้วย $a-bi$ และเมื่อส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ จะเขียนแทน $a+0i$ ด้วยจำนวนจริง a

ตัวอย่างที่ 2

จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $3+2i$ และ $1-i$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(3+2i)+(1-i) &= (3+1)+(2-1)i \\
&= 4+i \\
(3+2i)(1-i) &= 3(1-i)+2i(1-i) \\
&= 3-3i+2i-2i^2 \\
&= (3+2)+(-3+2)i \\
&= 5-i
\end{aligned}
$$

■

ตัวอย่างที่ 3

จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $2(1+3i)$ และ $i(2+4i)$

วิธีทำ เนื่องจาก $2(1+3i)=2+6i$ และ $i(2+4i)=2i+4i^2=-4+2i$

จะได้ $2(1+3i)+i(2+4i) = (2+6i)+(-4+2i)$

$$
\begin{aligned}
&= (2-4)+(6+2)i \\
&= -2+8i
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(2(1+3i))(i(2+4i)) &= (2+6i)(-4+2i) \\
&= 2(-4+2i)+6i(-4+2i) \\
&= -8+4i-24i+12i^2 \\
&= (-8-12)+(4-24)i \\
&= -20-20i
\end{aligned}
$$

■

ตัวอย่างที่ 4

จงหาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $(a+2i)+(-1+2bi)=3+8i$

วิธีทำ เนื่องจาก $(a+2i)+(-1+2bi)=(a-1)+(2+2b)i$

จะได้ $a-1 = 3$ และ $2+2b = 8$

ดังนั้น $a = 4$ และ $b = 3$ ■

ข้อสังเกต กำหนด $i^0=1$ จะได้ว่า $i^{4m}=1,\ i^{4m+1}=i,\ i^{4m+2}=-1,\ i^{4m+3}=-i$ เมื่อ $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   1) $2+3i$
   2) $-4+5i$
   3) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
   4) -4
   5) $3i$
   6) $\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

2. จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   1) $(-1,-2)$ และ $(2,1)$
   2) $(-2,2)$ และ $(2,-2)$
   3) $(-2,3)$ และ $(1,4)$
   4) $\left(3,\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(4,\frac{2}{3}\right)$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
   1) $(2-3i)+(4-5i)$
   2) $(5+4i)+3(2i-7)$
   3) $(2-\sqrt{2}i)+(5-\sqrt{8}i)$
   4) $i(2-i)$
   5) $\sqrt{2}i(i-\sqrt{2})$
   6) $i^2(3-4i)$
   7) $(-1-i)^2$
   8) $(3+2i)(2+4i)$
   9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$
   10) $(5-2i)(-2+3i)$

4. จงหาจำนวนจริง a และ b ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2a-3bi=4+6i$
2) $2a+bi=10$
3) $3a+(a-b)i=6+i$
4) $a+b-2abi=5-12i$
5) $(a+bi)(2+5i)=3-i$

5. จงหา

1) $(1-i)^3$
2) $(2+i)^4-(2-i)^4$
3) $(1+i)^3-(1-i)^3$
4) $(-i)^5(2+2i)^4$

1.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

เช่นเดียวกับระบบจำนวนจริง ระบบจำนวนเชิงซ้อนสอดคล้องกับสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณด้วย เช่น การมีเอกลักษณ์ การมีตัวผกผัน นอกจากนี้ยังสามารถนิยามการลบและการหารระหว่างจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วย

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

พิจารณาการบวกจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$(a, b)+(0, 0)=(a+0, b+0)=(a, b)$$

ทำนองเดียวกัน $(0, 0)+(a, b)=(a, b)$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $(0, 0)$ เป็น **เอกลักษณ์การบวก** ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 0)$ หรือ $0+0i$ ด้วย 0

ดังนั้น $(a+bi)+0=0+(a+bi)=a+bi$

ในระบบจำนวนจริง ตัวผกผันการบวกของจำนวนจริง คือ จำนวนที่นำมาบวกกับจำนวนจริงนั้นแล้วได้เอกลักษณ์การบวก ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนก็มีความหมายเดียวกัน

ถ้า (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วตัวผกผันการบวกของ (a, b) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่บวกกับ (a, b) แล้วได้ $(0, 0)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

เนื่องจาก $-a$ และ $-b$ เป็นตัวผกผันการบวกของ a และ b ตามลำดับ
ดังนั้น $(a, b)+(-a,-b)=(a-a, b-b)=(0, 0)$
และ $(-a, -b)+(a, b)=(-a+a, -b+b)=(0, 0)$
จะได้ว่า $(-a, -b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ (a, b)
หรือ $-a-bi$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $a+bi$

ตัวผกผันการบวก ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$
ดังนั้น $-(a+bi)=-a-bi$

ตัวอย่างเช่น ตัวผกผันการบวกของ $(-2, 1)$ คือ $(2, -1)$
ตัวผกผันการบวกของ $3+2i$ คือ $-3-2i$
ตัวผกผันการบวกของ $1-i$ คือ $-1+i$

การลบจำนวนเชิงซ้อน

เช่นเดียวกับระบบจำนวนจริง จะนิยามการลบกันของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

บทนิยาม 3

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w จะได้ว่า $z-w=z+(-w)$

ตัวอย่างที่ 5

จงหา $(2-3i)-(4-i)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(2-3i)-(4-i) &= (2-3i)+(-(4-i)) \\ &= (2-4)+(-3+1)i \\ &= -2-2i\end{aligned}$$

■

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

พิจารณาการคูณจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$\begin{aligned}(a, b)(1, 0) &= (a\cdot 1-b\cdot 0,\ a\cdot 0+b\cdot 1) \\ &= (a-0,\ 0+b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน $(1, 0)(a, b) = (a, b)$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $(1, 0)$ หรือ 1 เป็น **เอกลักษณ์การคูณ** ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่เท่ากับ $(0, 0)$ แล้วตัวผกผันการคูณของ (a, b) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับ (a, b) แล้วได้ $(1, 0)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

ให้ (x, y) เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b)

จะได้ $(a, b)(x, y) = (1, 0)$

แต่ $(a, b)(x, y) = (ax-by,\ ay+bx)$

ดังนั้น $(ax-by,\ ay+bx) = (1, 0)$

จากบทนิยามการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $ax-by=1$ และ $ay+bx=0$

โดยการแก้ระบบสมการ จะได้ $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$ และ $y=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$

ดังนั้น $(x, y)=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

ตรวจสอบว่า $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$ เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}\right)\\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0\right)\\ &= (1, 0)\end{aligned}$$

และสามารถแสดงได้ว่า $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)(a, b) = (1, 0)$

ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ (a, b) คือ $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$ เมื่อ $(a, b)\neq(0, 0)$

ตัวผกผันการคูณ ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย z^{-1}
เมื่อ $z=a+bi$ และ $z\neq 0$ จะได้ว่า $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

ตัวอย่างเช่น ตัวผกผันการคูณของ $(4, -3)$ คือ $\left(\dfrac{4}{25}, \dfrac{3}{25}\right)$

ตัวผกผันการคูณของ $-3+2i$ คือ $-\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับ $(0, 0)$ มาให้ จะหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนนี้ได้เสมอ ดังนั้น อาจนิยามการหารจำนวนเชิงซ้อน z ด้วย w เมื่อ $w \neq 0$ โดยใช้ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวหารได้ดังนี้

บทนิยาม 4

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ซึ่ง $w \neq 0$ จะได้ว่า $z \div w = zw^{-1}$ และเขียนแทน $z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

จากบทนิยาม ถ้า $z = a + bi$ และ $w = c + di$ ซึ่ง $w \neq 0$

แล้ว $\frac{z}{w} = zw^{-1} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

ตัวอย่างที่ 6

จงหา $\frac{3+2i}{4+3i}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4+3i} &= (3+2i)\left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\right) \\ &= \frac{12}{25} + \frac{6}{25} + \left(\frac{8}{25} - \frac{9}{25}\right)i \\ &= \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i\end{aligned}$$

■

จากที่ได้กล่าวมาแล้ว ระบบจำนวนเชิงซ้อนสอดคล้องกับสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่าสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน สามารถสรุปได้ดังนี้

ให้ z, z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	6. $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
สมบัติการสลับที่	2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	7. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	8. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4. $z + 0 = z = 0 + z$ เรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก	9. $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	5. $z + (-z) = 0 = (-z) + z$ เรียก $-z$ ว่า ตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของ z	10. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$ เรียก z^{-1} ว่า ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของ z
สมบัติการแจกแจง	11. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนเป็นทฤษฎีบท ซึ่งได้แสดงการพิสูจน์บางสมบัติไว้บ้างแล้ว

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

สังเกตว่า เมื่อคูณ $a+bi$ กับ $a-bi$ จะได้ a^2+b^2 ซึ่งเป็นจำนวนจริง จึงสามารถนำมาช่วยในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน ได้ดังนี้

ถ้า $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di \neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

เช่น

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4+3i} &= \left(\frac{3+2i}{4+3i}\right)\left(\frac{4-3i}{4-3i}\right)\\ &= \frac{(3(4)+(2)(3))+(2(4)-(3)(3))i}{4^2+3^2}\\ &= \frac{18}{25}-\frac{1}{25}i\end{aligned}$$

บทนิยาม 5

ให้ $z = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของ z คือ $a-bi$

สังยุคของ z เขียนแทนด้วย $\overline{z}$ ซึ่ง $\overline{z} = \overline{a+bi} = a-bi$

ตัวอย่างที่ 7

จงหาผลหารของการหาร $2-i$ ด้วย $3+2i$ โดยใช้สังยุคของตัวหาร

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+2i} &= \left(\frac{2-i}{3+2i}\right)\left(\frac{3-2i}{3-2i}\right)\\ &= \frac{(6-2)+(-3-4)i}{3^2+2^2}\\ &= \frac{4}{13}-\frac{7}{13}i\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 8

จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(2+3i)z=-1-2i$

วิธีทำ จาก $(2+3i)z = -1-2i$

จะได้
$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-1-2i}{2+3i} \\
&= \left(\frac{-1-2i}{2+3i}\right)\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right) \\
&= \frac{(-2-6)+(3-4)i}{2^2+3^2} \\
&= -\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i
\end{aligned}
$$
■

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน มีดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ และ $\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$
2. $\overline{\overline{z}}=z$
3. $\frac{1}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ เมื่อ $z\neq 0$
4. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
5. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
6. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2\neq 0$