หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑
ISBN 978-616-362-813-8
จำนวน ๒๐๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๒

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ ๑๐๓๓๐
www.chulabook.com
ฝ่ายขายติดต่อ แผนกขายส่ง โทร. ๐-๒๓๗๔-๑๓๗๕-๖ โทรสาร ๐-๒๓๗๔-๑๓๗๔

พิมพ์ที่
สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. ๐-๒๒๑๘-๓๕๕๑ โทรสาร ๐-๒๒๑๘-๓๕๕๐
www.cuprint.chula.ac.th

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๒๑ มกราคม พ.ศ. ๒๕๖๒

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ นี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยให้มีความลุ่มลึกขึ้นสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ และมีเนื้อหาสาระที่ทัดเทียมกับนานาชาติ เน้นการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ รวมทั้งเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่นๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ นี้มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมทริกซ์ และเวกเตอร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหาเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ ครูผู้สอน และนักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๑ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ การหาระยะทางและความสูง

เมทริกซ์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด ๒ × ๒ และ ๓ × ๓ เมทริกซ์ผกผัน การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

เวกเตอร์ เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์ ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

๒. แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

๓. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

๔. เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

๕. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ ๒ × ๒

๖. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

๗. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

๘. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๘ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“ ....
.... ”

ส่วนนำของบท
เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย
เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า
ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง
เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม
กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 ....
....

2. ....
....

3. ....
....

บทที่ 1 จะใช้สี

บทที่ 2 จะใช้สี

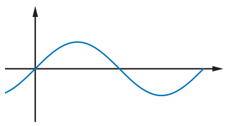
บทที่ 3 จะใช้สี

สารบัญ

บทที่ 1 – 2

บทที่	เนื้อหา	หน้า

1



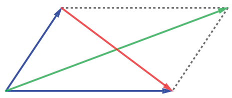
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

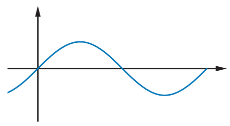
เมทริกซ์

สารบัญ	บทที่ 3	



เวกเตอร์

บทที่ 1 | ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

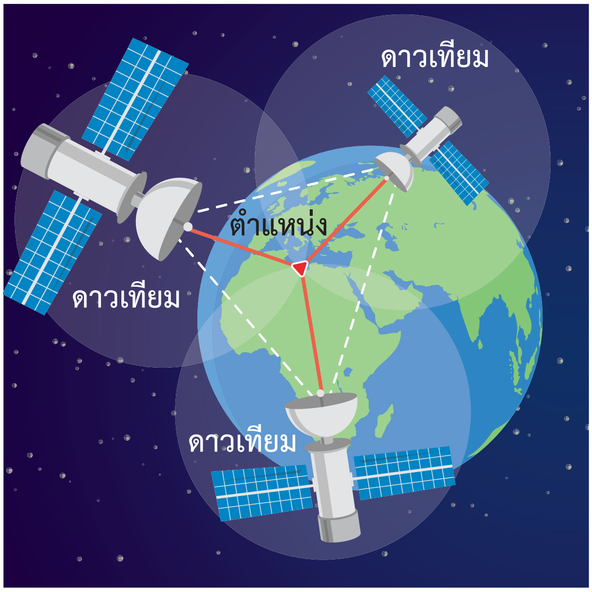


จุดมุ่งหมาย

1. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมในการแก้ปัญหา
4. หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. แก้สมการตรีโกณมิติ
7. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



ระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (Global Positioning System) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า GPS เป็นระบบที่ใช้อย่างแพร่หลายในปัจจุบัน โดย GPS จะใช้ข้อมูลจากดาวเทียมที่อยู่เหนือผิวโลกในการระบุพิกัดภูมิศาสตร์และระดับความสูงของพื้นที่ เมื่อใช้ GPS ร่วมกับแผนที่จะสามารถช่วยนำทางพาหนะหรือผู้ใช้ เพื่อให้ไปถึงที่หมายได้ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานสำคัญของ GPS คือ ตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยม ตลอดจนการวัดระยะทาง พื้นที่ มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง นอกจากนี้ ตรีโกณมิติยังได้นำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์อื่น ๆ อีกมากมาย เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรมเครื่องกลและไฟฟ้า ดาราศาสตร์ การเดินเรือ การสำรวจ และดนตรี

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- เรขาคณิตวิเคราะห์

ipst.me/8447

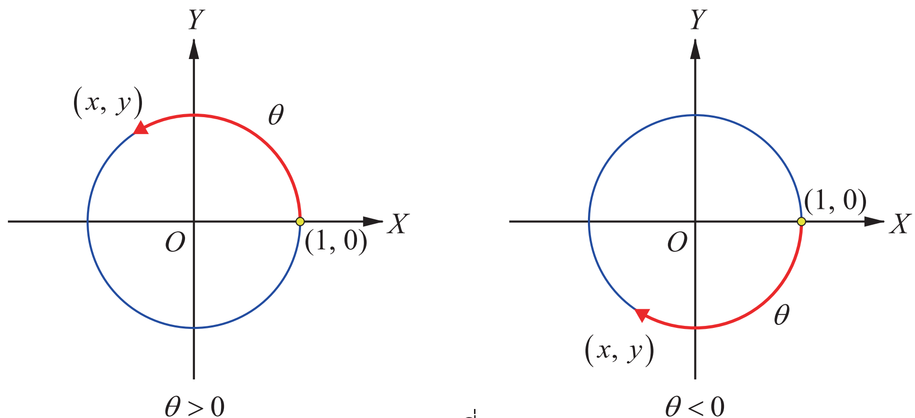
1.1 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย (the unit circle)** วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

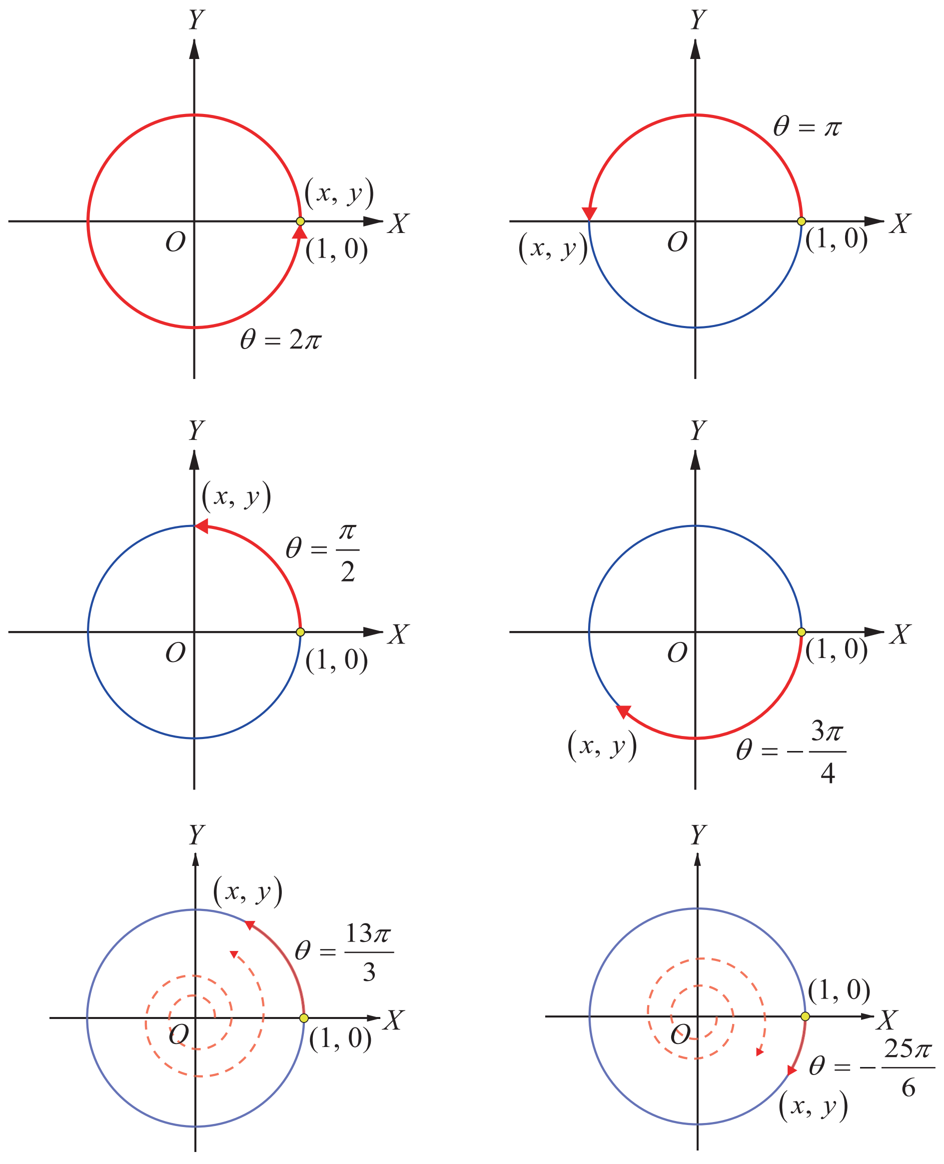
เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$



รูปที่ 1

รูปต่อไปนี้แสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน



รูปที่ 2

จะเห็นว่า เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้น จึงสามารถกำหนดฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta)=x$$
$$g(\theta)=y$$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางตามที่กล่าวข้างต้น

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้ว่า **ฟังก์ชันไซน์ (sine function)** และ **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function)** ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos ดังนี้

$y=\sin\theta$ (อ่านว่า วาย เท่ากับ ไซน์ทีตา)

$x=\cos\theta$ (อ่านว่า เอกซ์ เท่ากับ คอสทีตา)

วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\left\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \middle|\ x^2+y^2=1\right\}$$

จะเห็นว่า $-1\le y\le 1$ และ $-1\le x\le 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง

จากสมการ $x^2+y^2=1$, $y=\sin\theta$ และ $x=\cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ดังนี้

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1 \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

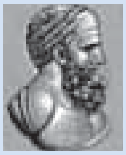
หรือ

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หมายเหตุ $\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)(\cos\theta)$

$\cos\theta^2$ หมายถึง cos ของจำนวนจริง θ^2

เสริมสมอง : Hipparchus และ Ptolemy


Hipparchus of Nicaea

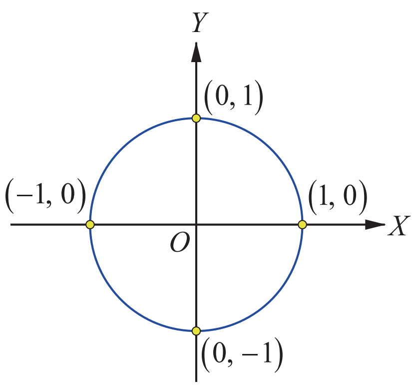

Claudius Ptolemy

Hipparchus of Nicaea (190–120 ปีก่อนคริสต์ศักราช) นักดาราศาสตร์ นักภูมิศาสตร์ และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาแห่งตรีโกณมิติ โดยได้พัฒนาวิชาตรีโกณมิติและได้ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและผลงานของอาร์คิมีดีสในการสร้างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการศึกษาด้านอื่น ๆ ได้แก่ ดาราศาสตร์ การเดินเรือ วิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ในยุคที่ยังไม่มีเครื่องคิดเลข แต่เนื่องจากงานของ Hipparchus ได้หายสาบสูญไปตามกาลเวลาเกือบทั้งหมด ข้อมูลส่วนใหญ่จึงได้มาจากเอกสารของ Claudius Ptolemy (ค.ศ. 100–170) นักคณิตศาสตร์ นักดาราศาสตร์ นักภูมิศาสตร์ และนักโหราศาสตร์ชาวกรีก ผู้สืบทอดงานของ Hipparchus โดยผลงานชิ้นเอกของ Ptolemy คือตำราทางคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ที่มีชื่อว่า Almagest

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ได้ด้วยวิธีง่าย ๆ

ถ้า $\theta = 0$ จะได้ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือ $(1, 0)$ ดังรูป
ดังนั้น $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$



รูปที่ 3

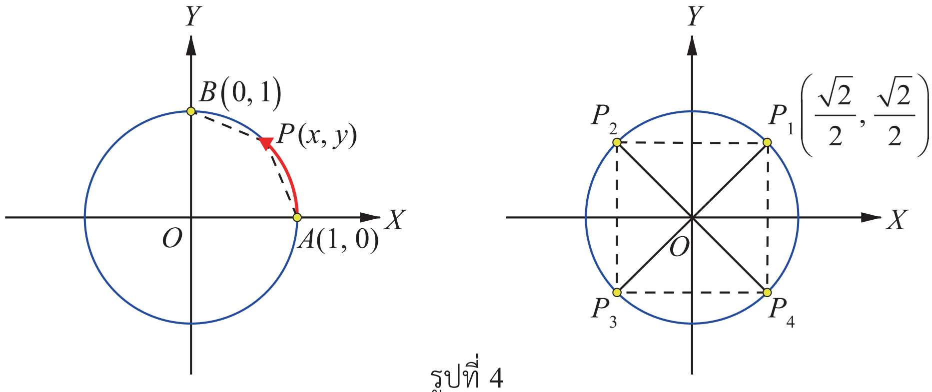
เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย และจุด $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ และ $(0, -1)$ เป็นจุดที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแต่ละส่วนยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2} &= 1, & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -1 \\
\sin\pi &= 0, & \sin(-\pi) &= 0 \\
\sin\frac{3\pi}{2} &= -1, & \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= 1 \\
\cos\frac{\pi}{2} &= 0, & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
\cos\pi &= -1, & \cos(-\pi) &= -1 \\
\cos\frac{3\pi}{2} &= 0, & \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า ค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{n\pi}{2}\right|$ หน่วย โดยวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ และ $(0, -1)$

ต่อไปจะพิจารณาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{4}$ และ $\cos\frac{\pi}{4}$



รูปที่ 4

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB และยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ
$$PB = PA$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$

จะได้ $x = y$

แต่ $x^2+y^2 = 1$ (เพราะ $P(x, y)$ อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย)

ดังนั้น $2x^2 = 1$

จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

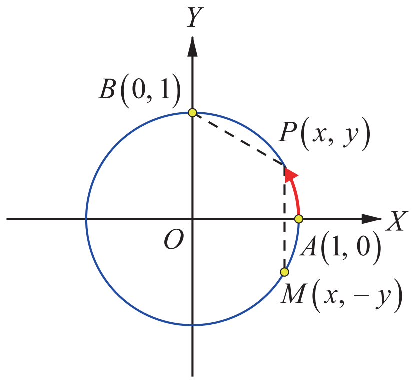
เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{6}$ และ $\cos\frac{\pi}{6}$



รูปที่ 5

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ ส่วนโค้ง AM ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP และยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และจุด M มีพิกัดเป็น $(x, -y)$

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
PM &= PB \\
\sqrt{(y-(-y))^2} &= \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
4y^2 &= x^2+y^2-2y+1 \\
4y^2+2y-2 &= 0 \quad \text{เนื่องจาก } x^2+y^2=1 \\
2y^2+y-1 &= 0 \\
(2y-1)(y+1) &= 0
\end{aligned}
$$

จะได้ $y=\frac{1}{2}$ หรือ $y=-1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

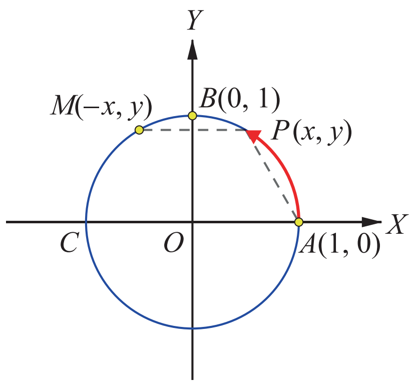
จะได้ $y = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}$



รูปที่ 6

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

ดังนั้น พิกัดของจุด M คือ $(-x, y)$ และส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมยาว π หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
PM &= PA \\
\sqrt{\left(x-(-x)\right)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
4x^2 + 2x - 2 &= 0 \qquad \text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1 \\
2x^2 + x - 1 &= 0 \\
(2x-1)(x+1) &= 0
\end{aligned}
$$

จะได้ $x = \frac{1}{2}$ หรือ $x = -1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = \frac{1}{2}$

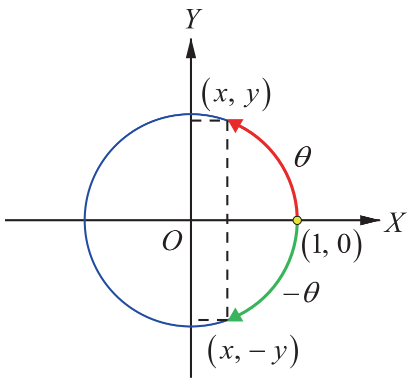
เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณาจำนวนจริง $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย (เนื่องจาก $\theta > 0$ จึงได้ $|\theta| = \theta$) เมื่อสะท้อนจุด (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อน จุด $(x, -y)$ จึงเป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมดังกล่าวที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย ดังรูป หรือกล่าวตามข้อตกลงเรื่องการวัดส่วนโค้งที่กล่าวมาแล้วได้ว่า $(x, -y)$ เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่เกิดจากจำนวนจริง $-\theta$



รูปที่ 7

จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$ สรุปได้ว่า

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

และ $$x = \cos(-\theta), \quad -y = \sin(-\theta)$$

ดังนั้น

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกใด ๆ ได้ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นตัวผกผันการบวกของจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ■

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาว 2π หน่วย ดังนั้น จุดปลายของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $2n\pi+\theta$ หน่วย จะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย โดยที่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะวัดระยะในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา n รอบ แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ จะวัดระยะในทิศทางตามเข็มนาฬิกา n รอบ จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(2n\pi+\theta) = \sin\theta$$
$$\cos(2n\pi+\theta) = \cos\theta$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

จากสมบัติข้างต้นนี้ จะเห็นว่าถ้าหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงทุกจำนวนได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าของ $\sin\frac{25\pi}{4}$ และ $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin\frac{25\pi}{4} &= \sin\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

และ

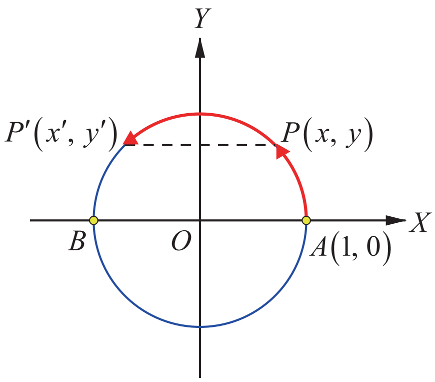
$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) &= \cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

■

จากที่ทราบว่าเมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้ ก็จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ แต่เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วย มีแกน X และแกน Y เป็นแกนสมมาตร การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ทำได้ดังนี้

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



รูปที่ 8

ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$

ให้ $\alpha = \pi - \theta$

จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = y,\ x' = -x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$

แต่ $y = y' = \sin\theta = \sin(\pi - \alpha)$

และ $-x = x' = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$