หนังสือเรียน

รายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑
ISBN 978-616-362-811-4
จำนวน ๒๕๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๒

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ ๑๐๓๓๐
www.chulabook.com
ฝ่ายขายติดต่อ แผนกขายส่ง โทร. ๐-๒๓๗๔-๑๓๗๕-๖ โทรสาร ๐-๒๓๗๔-๑๓๗๔

พิมพ์ที่
สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. ๐-๒๒๑๘-๓๕๕๑ โทรสาร ๐-๒๒๑๘-๓๕๕๐
www.cuprint.chula.ac.th

ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๒๑ มกราคม พ.ศ. ๒๕๖๒

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตรวิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ นี้ จัดทำตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีการปรับปรุงให้มีความทันสมัย คำนึงถึงการส่งเสริมให้ผู้เรียนมีทักษะที่จำเป็น สอดคล้องกับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ ๒๑ เป็นสำคัญ รวมทั้งเน้นด้านการคิดวิเคราะห์ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ และการนำไปประยุกต์ใช้เพื่อพัฒนาคุณภาพชีวิตของตนเอง

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่น ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)
เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้ โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ นี้ ประกอบด้วยเรื่อง เลขยกกำลัง ฟังก์ชัน และลำดับและอนุกรม ซึ่งจัดเนื้อหาตามลำดับพัฒนาการของผู้เรียน เป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน ผู้เรียนจะได้ทำกิจกรรมการเรียนรู้ การฝึกปฏิบัติ การตอบคำถาม การตรวจสอบความเข้าใจและสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ ตลอดจนมีกิจกรรมให้ผู้เรียนได้นำความรู้ที่เรียนในบทมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหา ในการจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ ครูผู้สอน และนักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้การจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้ มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“ .... ”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 ....
....

2. ....
....

3. ....
....

บทที่ 1 จะใช้สี บทที่ 2 จะใช้สี บทที่ 3 จะใช้สี

สารบัญ

บทที่ 1 – 2

บทที่	เนื้อหา	หน้า

สารบัญ

บทที่ 3

บทที่	เนื้อหา	หน้า

3

ลำดับและอนุกรม

บทที่ 1 | เลขยกกำลัง

1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม
1.2 รากที่ n ของจำนวนจริง
1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

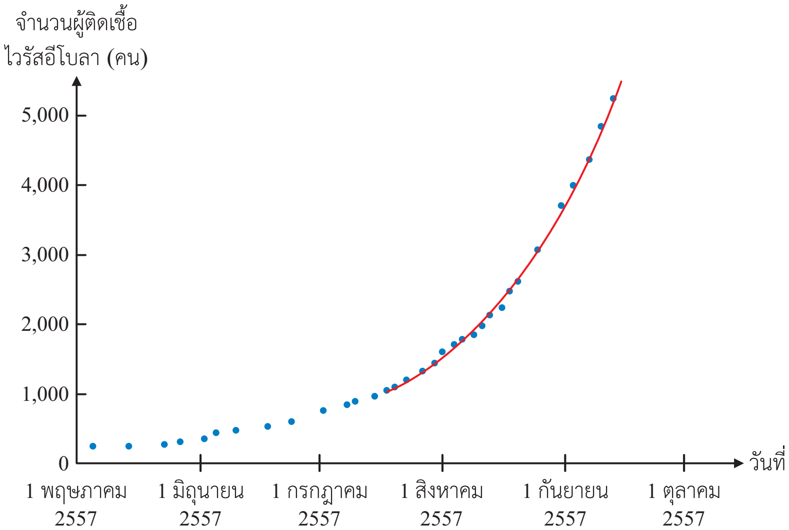
จุดมุ่งหมาย

1. หารากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ในการแก้ปัญหา
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

เลขยกกำลัง

ในเดือนมีนาคม พ.ศ. 2557 ได้เกิดการระบาดของโรคไวรัสอีโบลาขึ้นในแอฟริกาตะวันตก โดยถ่ายทอดผ่านทางสารคัดหลั่งของผู้ติดเชื้อ จำนวนผู้ติดเชื้อในเดือนพฤษภาคมถึงเดือนกันยายน พ.ศ. 2557 แสดงได้ดังกราฟ



จะเห็นว่าตั้งแต่ประมาณกลางเดือนกรกฎาคมจนถึงกลางเดือนกันยายน พ.ศ. 2557 จำนวนผู้ติดเชื้อเพิ่มสูงขึ้นอย่างรวดเร็ว โดยอาจนำเลขยกกำลังมาช่วยในการอธิบายการเพิ่มจำนวนของผู้ติดเชื้อ กล่าวคือ จำนวนผู้ติดเชื้อเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ทุก ๆ 24.3 วัน นั่นคือ ถ้ากลางเดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2557 มีผู้ติดเชื้อประมาณ 1,000 คน เมื่อเวลาผ่านไปทุก 24.3 วัน จะมีจำนวนผู้ติดเชื้อประมาณ 1000, 2(1000), 4(1000), 8(1000), 16(1000), 32(1000), 64(1000), ... หรืออาจกล่าวได้ว่าจำนวนผู้ติดเชื้อหาได้จาก $2^n(1000)$ เมื่อ n แทนระยะเวลาที่ผ่านไป โดยเป็นพหุคูณของ 24.3 วัน ถ้าปล่อยให้การเพิ่มขึ้นของผู้ติดเชื้อเป็นไปเช่นนี้เรื่อย ๆ จะทำให้ผู้ติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเร็วมากจนเป็นอันตรายต่อมนุษยชาติ จึงจำเป็นที่จะต้องมีมาตรการในการป้องกันการติดเชื้อ

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังและกรณฑ์ที่สองในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ipst.me/8446

1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

ในหัวข้อนี้ จะทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม โดยไม่มีการพิสูจน์

บทนิยาม 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก "a ยกกำลัง n" หรือ "a กำลัง n" เขียนแทนด้วย a^n มีความหมาย ดังนี้

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง
เรียก a ว่าฐานของเลขยกกำลัง และ
เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

ตัวอย่างเช่น

1. $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$
2. $(0.1)^4 = 0.1\times0.1\times0.1\times0.1 = 0.0001$
3. $(-1)^3 = (-1)\times(-1)\times(-1) = -1$
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$
5. $(-3)^0 = 1$
6. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3\times3} = \frac{1}{9}$
7. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)} = -\frac{1}{8}$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม มีดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a^m\times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a\times b)^n = a^n\times b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ตัวอย่างที่ 1

จงเขียน $8^6 \times 4^5$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 8^6 \times 4^5 &= (2^3)^6 \times (2^2)^5 \\ &= 2^{18} \times 2^{10} \\ &= 2^{18+10} \\ &= 2^{28} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 2

จงเขียน $\left(\frac{6}{5}\right)^3 \times 10^5$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5}\right)^3 \times 10^5 &= \left(\frac{3\times 2}{5}\right)^3 \times (2\times 5)^5 \\ &= \frac{3^3 \times 2^3}{5^3} \times 2^5 \times 5^5 \\ &= 3^3 \times 2^{3+5} \times 5^{5-3} \\ &= 3^3 \times 2^8 \times 5^2 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 3

จงเขียน $\frac{6^3 \times 3^2}{2^4 \times 3^{-2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{6^3 \times 3^2}{2^4 \times 3^{-2}} &= \frac{(2\times 3)^3 \times 3^2}{2^4 \times 3^{-2}} \\ &= \frac{2^3 \times 3^3 \times 3^2}{2^4 \times 3^{-2}} \\ &= 2^{3-4} \times 3^{3+2-(-2)} \\ &= 2^{-1} \times 3^7 \\ &= \frac{3^7}{2} \end{aligned}$$

■

เพื่อความสะดวกจะเขียน $a \cdot b$ หรือ ab แทน $a \times b$

ตัวอย่างที่ 4

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ จงทำให้พจน์ต่อไปนี้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2 x}{z}\right)$

2) $\left(x^{-3} y^{-2} z^0\right)^{-2}$

วิธีทำ 1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2 x}{z}\right) &= \frac{x^3 y^2 x}{y^3 z} \\ &= \frac{x^{3+1}}{y^{3-2} z} \\ &= \frac{x^4}{yz} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \left(x^{-3} y^{-2} z^0\right)^{-2} &= \left(x^{-3} y^{-2} (1)\right)^{-2} \\ &= \left(x^{-3} y^{-2}\right)^{-2} \\ &= \left(x^{-3}\right)^{-2} \left(y^{-2}\right)^{-2} \\ &= x^{(-3)(-2)} y^{(-2)(-2)} \\ &= x^6 y^4 \end{aligned}$$

■

เสริมสมอง : Google

Larry Page และ Sergey Brin นักศึกษาปริญญาเอก มหาวิทยาลัย Stanford ชาวอเมริกัน ได้ร่วมกันจัดทำโปรแกรมค้นหา (search engine) ซึ่งในปัจจุบันรู้จักกันในชื่อ Google และได้ก่อตั้ง Google Inc. ขึ้นใน ค.ศ. 1998 คำว่า Google มาจาก “googol” ซึ่งหมายถึง 10^{100} โดยชื่อ Google เป็นสิ่งที่สะท้อนให้เห็นว่าผู้ก่อตั้งต้องการจะสื่อถึงการจัดระเบียบข้อมูลบนโลกออนไลน์ที่มีปริมาณมหาศาล

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหา

   1) 1^{100}
   2) $(-1)^{2019}$
   3) $(-8.43)^{0}$
   4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

   1) $\left(3^{-2}\times 15^{8}\right)^{0}$
   2) $2^{3}\times 4^{-2}\times\left(32^{-2}\times 8\right)^{-1}$
   3) $\dfrac{2^{2}\times 10^{3}}{5^{4}\times 2^{5}}$
   4) $\dfrac{2^{-3}\times 3^{-5}}{3^{-5}\times 2^{0}}$

3. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ จงทำให้พจน์ต่อไปนี้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

   1) $\left(x^{3}y^{-2}\right)\left(x^{-5}y^{3}\right)$
   2) $\left(\dfrac{x^{4}}{2y^{-2}}\right)^{-2}\left(2xy^{2}\right)^{3}$
   3) $y^{4}\left(\dfrac{1}{3}y^{2}\right)\left(12y^{-8}\right)$
   4) $\left(x^{-5}y^{7}\right)\left(x^{-2}y^{-7}z^{0}\right)$
   5) $\left(\dfrac{1}{2}x^{-3}y^{2}\right)^{-4}$
   6) $\dfrac{\left(x^{2}y^{3}\right)\left(xy^{4}\right)^{-3}}{x^{2}y}$

1.2 รากที่ n ของจำนวนจริง

บทนิยาม 2

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

เนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะเป็นจำนวนจริงลบไม่ได้ ดังนั้น จะมีรากที่สองของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์เท่านั้น นั่นคือ x ในบทนิยามข้างต้นต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เช่น

4 เป็นรากที่สองของ 16 เพราะ $4^2 = 16$

$-\frac{1}{3}$ เป็นรากที่สองของ $\frac{1}{9}$ เพราะ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

0 เป็นรากที่สองของ 0 เพราะ $0^2 = 0$

ถ้า $x \geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า **รากที่สองที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ** ของ x และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{x}$ โดยเครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ เรียกว่า **เครื่องหมายกรณฑ์ (radical sign)**

เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $(-y)^2 = y^2$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ยกกำลังสอง แล้วได้ x กำลังสองของ $-y$ ก็จะเป็น x ด้วย

ดังนั้น สำหรับ $x > 0$ จะมีรากที่สองของ x สองราก คือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ โดยที่ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงลบ

ถ้า $x = 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงจำนวนเดียว คือ 0 เป็นรากที่สองของ x นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$

ถ้า $x < 0$ แล้วจะไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $\sqrt{x} = y$ เมื่อ $x \geq 0$ หมายความว่า $y^2 = x$ และ $y \geq 0$

ตัวอย่างที่ 5

จงหา

1) รากที่สองของ 16

2) รากที่สองของ $\frac{1}{9}$

3) รากที่สองของ 2

4) รากที่สองของ 3

วิธีทำ

1) เนื่องจาก $4^2 = 16$ และ $(-4)^2 = 16$

ดังนั้น รากที่สองของ 16 คือ 4 และ -4

2) เนื่องจาก $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ และ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

ดังนั้น รากที่สองของ $\frac{1}{9}$ คือ $\frac{1}{3}$ และ $-\frac{1}{3}$

3) เนื่องจาก $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ และ $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$

ดังนั้น รากที่สองของ 2 คือ $\sqrt{2}$ และ $-\sqrt{2}$

4) เนื่องจาก $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ และ $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 3$

ดังนั้น รากที่สองของ 3 คือ $\sqrt{3}$ และ $-\sqrt{3}$ ■

ตัวอย่างที่ 6

จงหา

1) $\sqrt{9}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{25}}$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $3^2 = 9$ และ $3 \geq 0$ ดังนั้น $\sqrt{9} = 3$

2) เนื่องจาก $5^2 = 25$ และ $5 \geq 0$ ดังนั้น $\sqrt{25} = 5$

จะได้ $\dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

■

ทฤษฎีบท 2

ให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ จะได้

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

ทฤษฎีบท 3

ให้ $x \geq 0$ และ $y > 0$ จะได้

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

ตัวอย่างที่ 7

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ 2) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$

วิธีทำ 1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{3\times 6} = \sqrt{3\times 3\times 2} = 3\sqrt{2}$

2) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{14}{2}} = \sqrt{7}$ ■

ในกรณีทั่วไป รากที่ n ของจำนวนจริง มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 3

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

หมายเหตุ ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว รากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริง จะมีรากเดียว และถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว เมื่อ $x > 0$ รากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริง จะมีสองราก

ตัวอย่างที่ 8

จงพิจารณาว่า

1) 2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 หรือไม่ เพราะเหตุใด
2) -2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 หรือไม่ เพราะเหตุใด
3) -3 เป็นรากที่ 5 ของ -243 หรือไม่ เพราะเหตุใด
4) 3 เป็นรากที่ 5 ของ -243 หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ 1) 2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 เพราะ $2^4 = 16$

2) -2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 เพราะ $(-2)^4 = 16$

3) -3 เป็นรากที่ 5 ของ -243 เพราะ $(-3)^5 = -243$

4) 3 ไม่เป็นรากที่ 5 ของ -243 เพราะ $3^5 = 243$ และ $243 \neq -243$ ■

ตัวอย่างที่ 9

จงหา

1) รากที่ 4 ของ 16

2) รากที่ 5 ของ -243

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $2^4 = 16$ และ $(-2)^4 = 16$

ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 มีสองราก คือ 2 และ -2

2) เนื่องจาก $(-3)^5 = -243$

ดังนั้น รากที่ 5 ของ -243 มีรากเดียว คือ -3 ■

ค่าหลักของรากที่ *n*

บทนิยาม 4

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

y เป็น**ค่าหลักของรากที่** n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x และ
2. $xy \geq 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ x หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ x

หมายเหตุ 1. การระบุกรณฑ์ที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ทำได้โดยการเขียน n ทางด้านซ้ายของเครื่องหมายกรณฑ์ ดังนี้ $\sqrt[n]{\ }$ และจะเรียก n ว่าเป็น **อันดับที่** หรือ **ดัชนี (index)** ของกรณฑ์ แต่ถ้า $n = 2$ นิยมเขียน $\sqrt{\ }$ แทน $\sqrt[2]{\ }$

2. จากบทนิยาม 4 จะได้ว่า ถ้า y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x แล้ว x และ y เป็นจำนวนจริงบวกทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนจริงลบทั้งคู่ หรือเป็นศูนย์ทั้งคู่

ตัวอย่างที่ 10

จงหา

1) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16
2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -125
3) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ -16

วิธีทำ 1) เนื่องจากรากที่ 4 ของ 16 คือ 2 และ -2
และ $16(2) > 0$ แต่ $16(-2) < 0$
ดังนั้น ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16 คือ 2

2) เนื่องจากรากที่ 3 ของ -125 มีรากเดียว คือ -5
และ $(-125)(-5) > 0$
ดังนั้น ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -125 คือ -5

3) เนื่องจากจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบยกกำลังด้วยจำนวนคู่ จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น จึงไม่มีรากที่ 4 ของ -16 ในระบบจำนวนจริง
จะได้ว่าไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -16 ในระบบจำนวนจริง ■

ทฤษฎีบท 4

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n จะได้

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

ทฤษฎีบท 5

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ จะได้

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

หมายเหตุ 1. ถ้า $x < 0$ หรือ $y < 0$ แล้วจะใช้ทฤษฎีบท 4 และ 5 ได้ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกเท่านั้น

2. ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนคี่บวก แล้ว $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$

3. ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว

1) $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

เช่น $\sqrt[9]{(-2)^9} = -2$

2) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

เช่น $\sqrt[8]{2^8} = 2$ และ $\sqrt[8]{(-2)^8} = -(-2) = 2$

ตัวอย่างที่ 11

จงหา

1) $\sqrt{125}$

2) $\sqrt[3]{8}$

3) $\sqrt[3]{81}$

4) $\sqrt[5]{-1}$

5) $\sqrt[4]{16}$

6) $\sqrt[3]{-1000}$

วิธีทำ

1) $\sqrt{125} = \sqrt{5\times5\times5} = 5\sqrt{5}$
2) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2\times2\times2} = 2$
3) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\times3\times3\times3} = 3\sqrt[3]{3}$
4) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)} = -1$
5) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2\times2\times2\times2} = 2$
6) $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10)(-10)(-10)} = -10$ ■

ตัวอย่างที่ 12

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}$
2) $\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{3}$
3) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{6}}$

วิธีทำ

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2\times3} = \sqrt[3]{6}$
2) $\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-2)\times3} = \sqrt[3]{-6} = -\sqrt[3]{6}$
3) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{72}{6}} = \sqrt[3]{12}$ ■

ตัวอย่างที่ 13

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$
2) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{9}}$

วิธีทำ

1) $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$
2) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{15}{\sqrt[3]{3\times3}} = \dfrac{15}{\sqrt[3]{3\times3}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{15\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3\times3\times3}} = \dfrac{15\sqrt[3]{3}}{3} = 5\sqrt[3]{3}$ ■